ENERGETIQUE
Formes d'énergies

→ *Prendre* $g = 9{,}81\ m \cdot s^{-2}$ *quand le champ de pesanteur terrestre n'est pas indiquer.*

ENERGIE MECANIQUE / cinétique de translation

EXERCICE 1

Calculer en J l'énergie cinétique E_C d'une voiture de masse $m = 1450\ kg$, se déplaçant à une vitesse $V = 90\ km \cdot h^{-1}$.

$E_C = 4{,}5 \cdot 10^5\ J$

Pas de difficulté particulière, si ce n'est de ne pas oublier de convertir la vitesse en unité légale.

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \times 1450 \times \left(\frac{90}{3{,}6}\right)^2 = \underline{4{,}53 \cdot 10^5\ J}$$

EXERCICE 2

Un bille de flipper en acier chromé de diamètre $d = 25\ mm$ doit disposer d'une énergie cinétique minimale de translation $E_{C\,min} = 25\ J$ pour actionner le bumber qu'elle percute.

a) Calculer en kg la masse m_b de la bille.

$m_b = 6{,}4 \cdot 10^{-2}\ kg$

Il faut bien voir ici qu'on nous donne :

- le matériau (acier chromé et qu'on dispose donc de la masse volumique, soit parce qu'on a la valeur en tête, $\rho_{acier} = 7800\ kg \cdot m^3$, soit parce qu'on va la chercher dans les annexes de la section « Matériaux »)
- le diamètre de la bille (une sphère donc), à partir duquel on peut calculer le volume à condition de se rappeler de la relation $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$ où $R = \frac{d}{2}$ est le rayon de la sphère.

Et comme on nous demande la masse, il faut ressortir la relation entre masse, volume et masse volumique :

$\rho = \frac{M}{V}$ (c'est la définition de la masse volumique)

$$\Leftrightarrow \quad M = \rho \times V = 7800 \times \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{25 \cdot 10^{-3}}{2}\right)^3 = \underline{6{,}38 \cdot 10^{-2}\ kg}$$

Attention aux unités !

b) Calculer en $m \cdot s^{-1}$ la vitesse minimum V_{min} à laquelle elle doit percuter le bumper.

$V_{min} = 0{,}28\ m \cdot s^{-1}$

L'énoncé nous indique l'énergie minimale que doit avoir la bille ; on a sa masse, et on nous demande la vitesse. On peut donc partir de l'expression de l'Ec en translation :

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad \Leftrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{C\,min}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 25}{6{,}38 \cdot 10^{-2}}} = \frac{1}{2} \times 1450 \times \left(\frac{90}{3{,}6}\right)^2 = \underline{0{,}28\ m \cdot s^{-1}}$$

c) Quelle hypothèse avez-vous fait sans même vous en rendre compte ?

On a considéré l'énergie cinétique de translation de la bille ; or, en plus du mouvement de translation, il y a le mouvement de rotation, puisque la bille roule (peut être sans glisser) sur le plan du flipper.
⇨ En « oublient » de considérer l'énergie associée au mouvement de rotation, cela revient à faire l'hypothèse que la **bille glisse sans rouler** sur le plan du flipper.

ENERGIE MECANIQUE / cinétique de rotation

EXERCICE 3

Calculer en J l'énergie cinétique E_C d'un rotor d'éolienne de moment d'inertie $J = 5{,}3 \cdot 10^7 \ kg \cdot m^2$ et tournant à une vitesse de rotation $N = 3 \ tr \cdot min^{-1}$. $E_C = 2{,}6 \cdot 10^6 \ J$

☞ *Moment d'inertie : voir fiche n°7 section « Mécanique du solide ».*

$E_C = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$ avec $\omega = \frac{2\pi \cdot N}{60}$ (pour convertir les $tr \cdot min^{-1}$ qui sont donnés en $rad \cdot s^{-1}$ nécessaires au calcul).

A noter : le moment d'inertie est donné en $kg \cdot m^2$, donc en unités SI => pas de problème ici.

$$\omega = \frac{2\pi \cdot N}{60} = \frac{2\pi \times 3}{60} = 0{,}314 \ rad \cdot s^{-1}$$

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \times 5{,}3 \cdot 10^7 \times 0{,}314^2 = \underline{2{,}6 \cdot 10^6 \ J}$$

EXERCICE 4

On impose à un volant d'inertie (voir fiche n°3 en énergétique) une vitesse angulaire $\omega = 15 \ rad \cdot s^{-1}$ et une énergie cinétique $E_C = 50 \ kJ$.

a) Calculer en $kg \cdot m^2$ son moment d'inertie I_G. $I_G = 444 \ kg \cdot m^2$

Un volant d'inertie est une masse tournante ; elle dispose donc d'une énergie cinétique de rotation :

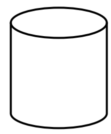
$$E_C = \frac{1}{2} \cdot I_G \cdot \omega^2 \quad \Leftrightarrow \quad I_G = \frac{2 \cdot E_C}{\omega^2} = \frac{2 \times 50000}{15^2} = \underline{444 \ kg \cdot m^2}$$

<u>A se rappeler</u> : *le moment d'inertie est parfois noté J, I, I_G ce qui précise que le moment d'inertie est celui par rapport à un axe passant par le centre d'inertie (ou centre de gravité), I_{GX}, ce qui précise l'axe (ici X) par rapport auquel le moment d'inertie est donné (ou demandé).*

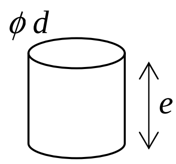
Le volant d'inertie est en acier et sa géométrie est un cylindre de diamètre $d = 1 \ m$.

b) Calculer en mm son épaisseur e. $e = 580 \ mm$

Il faut déjà comprendre ce qu'on nous dit, ce qu'on nous donne, à savoir que la géométrie du volant est celle d'un cylindre. Donc, dans votre esprit, il doit y avoir ça :



Il doit y avoir aussi dans votre esprit le fait que géométriquement, un cylindre est défini par son diamètre (ou son rayon) ET sa hauteur, appelée ici « épaisseur » :



La clé pour répondre à la question est le moment d'inertie, c'est ce qui va relier le diamètre d qu'on connaît à l'épaisseur e qu'on cherche.
Mais quelle est la relation mathématique ? Rien de plus que la formule classique du moment d'inertie d'un cylindre. Elle est donnée dans le tableau des moments d'inertie des géométries usuelles, fiche n°7, section « Mécanique du solide » ; on a : $I_G = \dfrac{M \cdot R^2}{2}$ (formule qu'on peut retenir…)

Le rayon R sera facile à trouver puisqu'on nous donne le diamètre d et qu'on a $R = \dfrac{d}{2}$.

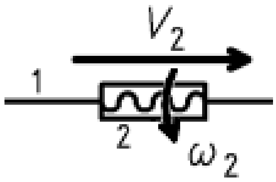
Par contre, nous n'avons pas la masse, l'énoncé ne la donne pas ! Aïe, comment faire ?
Déjà, remarquer qu'on nous donne le matériau, de l'acier, et on connaît la masse volumique : $\rho = 7800\ kg \cdot m^{-3}$
Mais la masse volumique n'est pas la masse… Il faut le volume pour lier tout ça car $M = \rho \cdot V$
Or, le volume d'un cylindre est donné par la relation $V = base \times hauteur$
Avec : $base = \pi \cdot R^2$ et $hauteur = e$ (la fameuse épaisseur)
Soit, $V = \pi \cdot R^2 \cdot e$
Donc, $M = \rho \cdot V = \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot e$
Et, $I_G = \dfrac{\rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot e \cdot R^2}{2} = \dfrac{\rho \cdot \pi \cdot e \cdot R^4}{2}$
D'où l'expression de l'épaisseur e :

$$e = \frac{2 \cdot I_G}{\rho \cdot \pi \cdot R^4} = \frac{2 \times 444}{7800 \times \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^4} = 0{,}58\ m \equiv \underline{580\ mm}$$

Et voilà !
Attention, une difficulté dans cette question est la bonne rédaction de la réponse ; veillez à ne pas mettre des chiffres ou des lettres de partout où on y comprend plus rien ; votre réponse, calculatoire ici, doit être organisée et claire (et ce, que le résultat soit juste ou faux).

ENERGIE MECANIQUE / cinétique de translation et rotation

EXERCICE 5



Soit la liaison hélicoïdale (ou système « vis/écrou ») ci-contre. On donne le nombre de filets, $Z = 1$ et le pas de vis $p = 1{,}5\ mm$. La vis (1) est fixe et s'est l'écrou (2) qui tourne et translate à la vitesse $v_{écrou} = 50\ mm \cdot s^{-1}$. L'écrou a une masse $m = 490\ gr$ et un moment d'inertie $J = 2 \cdot 10^{-5}\ kg \cdot m^2$.

a) Calculer en J l'énergie cinétique de translation E_{CT} de l'écrou. $E_{CT} = 6{,}12 \cdot 10^{-4}\ J$

Facile, on nous donne la masse et la vitesse ; attention aux unités :

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \times \frac{490}{1000} \times \left(\frac{50}{1000}\right)^2 = \underline{6{,}12 \cdot 10^{-4}\ J}$$

b) Calculer en J l'énergie cinétique de rotation E_{CR} de l'écrou. $E_{CR} = 0{,}985\ J$

Un peu moins facile, on nous donne le moment d'inertie mais pas la vitesse de rotation ω qu'il va falloir trouver…

Dans un système « vis/écrou », les vitesses de translation v et de rotation N sont reliées par la relation : $v = Z \cdot p \cdot N$

Elle vient d'où cette formule ? Fiche n°7, section « Génie mécanique » (transmission de puissance)

L'énoncé nous donne Z et p, ça tombe bien, et aussi la vitesse v en $mm \cdot s^{-1}$.

On aura donc $N = \dfrac{v}{Z \cdot p} = \dfrac{50}{1 \times 1{,}5} = 33{,}3\ tr \cdot s^{-1}$

Attention aux unités ici :

- on a gardé la vitesse v en $mm \cdot s^{-1}$ et on a pris le pas en mm => tout va bien.
- Puisque v est en $mm \cdot s^{-1}$, on obtient pour N des $tr \cdot s^{-1}$; ça ne sort pas du chapeau, il faut bien réfléchir, calmement, car ici on a vite fait de se tromper…

Bien, ça y est, on a notre vitesse mais pas dans la bonne unité car pour calculer l'énergie en J, il faut des $rad \cdot s^{-1}$ et non des $tr \cdot s^{-1}$; il faudra convertir en ramenant un 2π au bon endroit dans le calcul…

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \times 2 \cdot 10^{-5} \times (33{,}3 \times 2\pi)^2 = \underline{0{,}985\ J}$$

c) Calculer en J l'énergie cinétique totale E_C de l'écrou. $E_C = 0{,}986\ J$

$$E_C = E_{CT} + E_{CR} = 6{,}12 \cdot 10^{-4} + 0{,}985 = \underline{0{,}986\ J}$$

d) Calculer en % les contributions des énergies cinétiques de translation et de rotation. $E_{CT} = 0{,}06\%$ / $E_{CR} = 99{,}94\%$

Translation : $T\% = \dfrac{100 \times E_{CT}}{E_C} = \dfrac{100 \times 6{,}12 \cdot 10^{-4}}{0{,}986} = \underline{0{,}06\ \%}$

Rotation : $R\% = 100 - T\% = 100 - 0{,}06 = \underline{99{,}94\ \%}$

ENERGIE MECANIQUE / potentielle de hauteur

EXERCICE 6

Calculer en J l'énergie potentielle de pesanteur E_P d'une personne de masse $m = 46\ kg$ placée sur terre à une hauteur $h = 3{,}5\ m$. $E_P = 1579\ J$

Ca doit être facile et immédiat : $E_P = m \cdot g \cdot h = 46 \times 9{,}81 \times 3{,}5 = \underline{1579\ J}$

EXERCICE 7

Calculer en m la hauteur que doit avoir une personne de masse $m = 68\ kg$ pour que son énergie potentielle de pesanteur soit $E_P = 2 \cdot 10^3\ J$. $h = 3\ m$

Ca doit être facile et immédiat : $E_P = m \cdot g \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad h = \dfrac{E_P}{g \cdot m} = \dfrac{2000}{9{,}81 \times 68} = \underline{3\ m}$

EXERCICE 8

Soit une cabine d'ascenseur de masse $m_C = 1200\ kg$ et ses occupants de masse $m_O = 600\ kg$ placés dans le champ de pesanteur terrestre. On ne souhaite pas dépasser une énergie potentielle de pesanteur $E_P = 0{,}5\ MJ$. Calculer en m la hauteur maximum h à ne pas dépasser. $h = 28{,}3\ m$

Ca doit être facile et immédiat : (attention aux unités…)

$$E_P = m \cdot g \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{E_P}{g \cdot m} = \frac{0{,}5 \cdot 10^6}{9{,}81 \times (1200 + 600)} = \underline{28{,}3\ m}$$

ENERGIE MECANIQUE / potentielle de déformation

EXERCICE 9

On considère un ressort de compression de raideur $k = 2200\ N \cdot m^{-1}$ que l'on comprime à une flèche $\Delta L = 0{,}0063\ m$. Calculer en J l'énergie potentielle élastique E_P dont il dispose. $E_P = 0{,}044\ J$

Ca doit être facile et immédiat : (à noter que tout est en unité SI => pas de problème de conversion)

$$E_P = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta L^2 = \frac{1}{2} \times 2200 \times 0{,}0063^2 = \underline{0{,}044\ J}$$

EXERCICE 10

On considère un ressort de compression de raideur $k = 3\ N \cdot mm^{-1}$ que l'on comprime à une flèche $\Delta L = 12\ mm$. Calculer en J l'énergie potentielle élastique E_P dont il dispose. $E_P = 0{,}216\ J$

Ca doit être facile et immédiat : (à noter que tout n'est PAS en unité SI => conversion en vue…)

$$E_P = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta L^2 = \frac{1}{2} \times (3 \times 1000) \times \left(\frac{12}{1000}\right)^2 = \underline{0{,}216\ J}$$

EXERCICE 11

On considère un ressort de traction de raideur $k = 8\ N \cdot mm^{-1}$ sur lequel on tire avec une force $F = 160\ N$.

a) Calculer en mm puis en m l'allongement ΔL qu'il subit. $\Delta L = 20\ mm \equiv 0{,}02\ m$

Ca doit être facile et immédiat.

Il faut partir de la loi de comportement du ressort qui met en relation force, allongement et raideur (voir fiche n°8, section « Modélisation des efforts ») :

$$F = k \cdot \Delta L \quad \Leftrightarrow \quad \Delta L = \frac{F}{k} = \frac{160}{8} = \underline{20\ mm \equiv 0{,}02\ m}$$

Notez qu'on a conservé partout les mm et que ça ne pose pas de problème (c'est cohérent).

b) Calculer en J l'énergie potentielle élastique E_P dont il dispose. $E_P = 1{,}6\ J$

Là, il ne faut pas rester en mm, mais passer en m (pour le ΔL mais aussi pour k) sinon nous n'aura pas des J.

$$E_P = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta L^2 = \frac{1}{2} \times (8 \times 1000) \times 0{,}02^2 = \underline{1{,}6\ J}$$

c) (Essayer de) Montrer que l'expression de la force en fonction de l'énergie est $F=\sqrt{2\cdot k\cdot E_P}$.

Il suffit de rapprocher les deux expressions suivantes :

$F=k\cdot\Delta L$ (1)

$E_P=\frac{1}{2}\cdot k\cdot\Delta L^2$ (2)

Puisqu'on nous demande F en fonction de k et E_P, on peut chercher à faire le lien entre ces relations via l'allongement ΔL ; il y a mathématiquement plusieurs façon de faire, en voici une :

(1) => $\Delta L=\frac{F}{k}$

On injecte ceci dans (2) :

$$E_P=\frac{1}{2}\cdot k\cdot\left(\frac{F}{k}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\cdot k\cdot\frac{F^2}{k^2}$$

$$E_P=\frac{F^2}{2\cdot k} \quad\Leftrightarrow\quad \underline{F=\sqrt{2\cdot k\cdot E_P}}$$

d) Calculer en N la force F' pour que son énergie potentielle élastique soit $E_P'=3\cdot E_P$. $F'=277\ N$

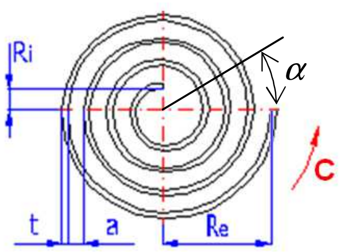
Puisqu'on a maintenant la relation entre l'énergie et la force, c'est tout simple :

$$F=\sqrt{2\cdot k\cdot E_P}=\sqrt{2\times(8\times1000)\times(3\times1{,}6)}=\underline{277\ N}$$

EXERCICE 12

On considère un ressort de torsion en spirale de raideur $k=3\ N\cdot m\cdot rad^{-1}$ subissant un couple $C=0{,}9\ N\cdot m$.

☞ *Ressort de torsion : voir fiche n°8 section « Modélisation des efforts ».*



a) Compléter la figure ci-contre en mettant en évidence le déplacement angulaire α .

b) Calculer en rad puis en deg le déplacement angulaire α .

$\alpha=0{,}3\ rad\equiv17{,}2\ deg$

On a la relation linéaire donnant le couple en fonction de l'angle et, les données de l'énoncé sont toutes en unités SI => pas de soucis de conversion…

$$C=k\cdot\alpha \quad\Leftrightarrow\quad \alpha=\frac{C}{k}=\frac{0{,}9}{3}=\underline{0{,}3\ rad}\equiv0{,}3\times\frac{180}{\pi}=\underline{17{,}2\ deg}$$

<u>Remarque</u> : vous avez le droit de faire un peu d'analyse dimensionnelle sur la relation $C=k\cdot\alpha$ pour bien comprendre l'unité de la raideur k …

c) Calculer en J l'énergie potentielle élastique E_P dont il dispose.

$E_P = 0{,}135\ J$

Remarque : on note α ou $\Delta\alpha$ la variation d'angle de l'extrémité du ressort de torsion, peu importe.

$$E_P = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta\alpha^2 = \frac{1}{2} \times 3 \times 0{,}3^2 = \underline{0{,}135\ J}$$

EXERCICE 13

Une barre en magnésium de section cylindrique de diamètre $d = 10\ mm$ et de longueur $L = 700\ mm$ est sollicitée en traction avec une force $F = 1450\ daN$.

a) S'assurer que la déformation est élastique.

Il faut se rappeler ici qu'un matériau possède un domaine élastique et n domaine plastique ; sans refaire le cours là-dessus, disons simplement que :

- domaine élastique : sollicitée en traction, la pièce s'allonge proportionnellement à l'effort et reprend ses dimensions initiales quand la sollicitation cesse.
- Domaine élastique : la sollicitation va au-delà de la limite élastique R_e et, lorsque la sollicitation cesse, la pièce possède une déformation permanente.
- ⇨ le domaine élastique est défini par une relation linéaire entre la contrainte σ et la déformation ε (voir la loi de Hooke issue de l'essai de traction, section « Matériaux »)
- ⇨ Le domaine élastique se termine à la limite élastique R_e.

Pour qu'un pièce travaille dans son domaine élastique, il faut et il suffit que la contrainte σ qu'elle subit reste inférieure à la limite élastique R_e : $\sigma < R_e$.

L'énoncé nous dit que la barre est en magnésium. On consulte l'annexe 4 dans la section « Matériaux » et on trouve $R_e = 200\ MPa$ pour le magnésium.

Reste à calculer la contrainte σ pour voir si elle est – ou pas – inférieure à la limite élastique du magnésium…

La barre est sollicitée en traction ; la contrainte est dans ce cas donnée par la relation $\sigma = \dfrac{F}{S}$ avec $S = \dfrac{\pi \cdot d^2}{4}$

l'aide de la section droite de la barre ; on a donc pour le moment : $\sigma = \dfrac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2} = \dfrac{4 \times 14500}{\pi \cdot 10^2} = 184{,}6\ MPa$

Conclusion : on a bien $\sigma < R_e$, ce qui signifie que **<u>la déformation de la barre est bien élastique</u>**.

b) Calculer en J l'énergie de déformation W.

$W = 20{,}6\ J$

Que faut-il comprendre ici ? que quand on déforme un solide (ici une barre sollicitée en traction), ce dernier accumule de l'énergie, dite de déformation. C'est avec ça qu'on fabrique des lance-pierres, des catapultes, des montres à ressort, etc…

Comment on calcule l'énergie ???? Bon, voilà un petit calcul que nous ne ferons pas tous les jours, mais aujourd'hui, oui ! Il suffit de prendre la bonne formule dans la fiche n°7, « Sollicitations simples – Synthèse » dans la section « RDM ». Fallait le savoir, c'est vrai…

$$W = \int_0^L \frac{N^2}{2 \cdot E \cdot S} \cdot dx = \frac{N^2}{2 \cdot E \cdot S} \cdot \int_0^L dx = \frac{N^2 \cdot L}{2 \cdot E \cdot S} = \frac{14500^2 \times 0{,}7 \times 4}{2 \times 45500 \cdot 10^6 \times \pi \times 0{,}01^2} = \underline{20{,}6\ J}$$

<u>Attention aux unités !</u> Travaillez bien en unités SI (système MKS) pour avoir des Joules